Chauffage par induction.

Un solénoïde long, d'axe Oz contient n spires par unité de longueur parcourues par un courant $I(t) = I_0 \cos(\omega t)$ et crée un champ magnétique $\overrightarrow{B}(t) = B_0 \cos(\omega t)\, \overrightarrow{e}_z$ avec $B_0 = \mu_0\, n\, I_0$.

Question 1 :

Justifier l'existence d'un champ électrique. On cherche un champ orthoradial $\overrightarrow{E}(M,t) = E(r,t)\, \overrightarrow{e_\theta}$. Justifier cette orientation et ce type de formule. Exploiter la formule de Faraday pour trouver la fonction $E(r,t)$.

Le plan méridien passant par le point M et l'axe Oz est plan d'antisymétrie ; le champ magnétique est donc dans ce plan et le champ électrique lui est orthogonal, donc orthoradial. De plus l'invariance par rotation et translation selon Oz indique que son module ne dépend que de la distance r à l'axe et $\overrightarrow{E}(M,t) = E(r,t)\, \overrightarrow{e_\theta}$.

Le circulation de $\overrightarrow{E}$ le long d'un cercle d'axe Oz et de rayon r est donc d'une part $e = \oint \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{d\ell} = 2\,\pi\, r\, E(r,t)$ et d'autre part, et par définition, la force électromotrice pour ce contour. Le flux magnétique à travers le disque est, puisque $\overrightarrow{B}$ est uniforme, $\Phi = \pi\, r^2\, B(t) = \pi\, r^2\, B_0 \cos(\omega t)$.

La loi de Faraday ($e = -\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}$) donne :

$$2\,\pi\, r\, E(r,t) = \pi\, r^2\, \omega\, B_0 \sin(\omega t)$$

$$E(r,t) = \frac{1}{2}\, r\, \omega\, B_0 \sin(\omega t)$$

Question 2 :

Un cylindre conducteur cylindrique d'axe Oz, de hauteur H, de rayon R et de conductivité électrique σ est placé dans ce champ électromagnétique. Calculer la puissance moyenne développée par l'effet Joule. Plusieurs approches équivalentes sont possibles.

Considérons une boucle de courant filiforme, circulaire de rayon r (puisque $\overrightarrow{j} = \sigma\, \overrightarrow{E}$ est orthoradial), dont la section par un plan méridien soit rectangulaire de côtés $\mathrm{d}z$ dans le sens axial et $\mathrm{d}r$ dans le sens radial ; elle est traversée par le courant élémentaire :

$$I = j\, S = \sigma\, E(r,t)\, \mathrm{d}z\, \mathrm{d}r = \frac{1}{2}\, \sigma\, r\, \omega\, B_0 \sin(\omega t)\, \mathrm{d}z\, \mathrm{d}r$$

Sa résistance électrique R_e est calculée par la formule classique ;

$$R_e = \frac{\ell}{\sigma\, S} = \frac{2\,\pi\, r}{\sigma\, \mathrm{d}z\, \mathrm{d}r}$$

Et l'effet Joule élémentaire est :

$$\mathrm{d}_2\mathcal{P} = R_e\, I^2 = \frac{\pi}{2}\, \sigma\, r^3\, \omega^2\, B_0^2 \sin^2(\omega t)\, \mathrm{d}z\, \mathrm{d}r$$

Une autre méthode, plus fondamentale, consiste à calculer la puissance transférée aux charges dans un volume élémentaire :

$$\mathrm{d}_3\mathcal{P} = \overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{E}\, \mathrm{d}_3V = \sigma\, \overrightarrow{E}^2\, r\, \mathrm{d}r\, \mathrm{d}\theta\, \mathrm{d}z = \frac{1}{4}\, \sigma\, r^3\, \omega^2\, B_0^2 \sin^2(\omega t)\, \mathrm{d}r\, \mathrm{d}\theta\, \mathrm{d}z$$

L'intégration de $\mathrm{d}_3\mathcal{P}$ de $\theta = 0$ à $2\,\pi$ conduit à $\mathrm{d}_2\mathcal{P}$ qu'il suffit d'intégrer de $z = 0$ à H et de $r = 0$ à R.

$$\mathcal{P} = \frac{\pi}{2}\, \sigma\, \omega^2\, B_0^2 \sin^2(\omega t) \int_0^H \mathrm{d}z \int_0^R r^3\, \mathrm{d}r = \frac{\pi}{8}\, \sigma\, R^4\, H\, \omega^2\, B_0^2 \sin^2(\omega t)$$

dont la valeur moyenne dans le temps est

$$\langle \mathcal{P} \rangle = \frac{\pi}{16}\, \sigma\, R^4\, H\, \omega^2\, B_0^2$$

Question 3 :

On admet que ce conducteur est suffisamment conducteur thermique pour que sa température T soit uniforme et qu'il évacue par sa surface une puissance surfacique $h\,(T - T_0)$ où h est une constante et T_0 la température ambiante. A partir de quelle pulsation, le métal (de température de fusion T_F) peut-il fondre ?

En régime permanent, cette puissance est intégralement évacuée sous forme de chaleur par la surface d'aire $S = 2\,\pi\, R\, H + 2\,\pi\, R^2$ (surface latérale, fond et couvercle) ; on atteint donc une températute d'équilibre T_e telle que

$$\langle \mathcal{P} \rangle = h\, S\, (T_e - T_0)$$

et donc le métal fond si

$$\langle \mathcal{P} \rangle > h\, S\, (T_F - T_0)$$

ce qui permet d'accéder à la pulsation critique si les autres paramètres sont fixés.

Question 4 :

Déterminer le champ magnétique $\overrightarrow{b}\,(M,t)$ créé sur l'axe par les courants induits, en supposant H grand devant R. A quelle condition est-il négligeable devant B_0 (On fera apparaître l'épaisseur de peau $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0\,\sigma\,\omega}}$) ?

Découpons en boucles (ou spires) de courant avec la même géométrie que plus haut. Regroupons les spires de même rayon, elles forment un solénoïde qui crée un champ élémentaire $\mathrm{d}\overrightarrow{b} = \mathrm{d}b\,\overrightarrow{e_z}$ avec $\mathrm{d}b = \mu_0\, n\, I$ avec I calculé plus haut ($I = \frac{1}{2}\,\sigma\, r\,\omega\, B_0\, \sin(\omega\, t)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}r$) et n, nombre de spires par unité de longueur égal à $1/\mathrm{d}z$ d'où

$$\mathrm{d}b = \frac{1}{2}\,\mu_0\,\sigma\, r\,\omega\, B_0\, \sin(\omega\, t)\,\mathrm{d}r$$

qu'il ne reste qu'à intégrer de $r = 0$ à R

$$b(t) = \frac{1}{2}\,\mu_0\,\sigma\,\omega\, B_0\, \sin(\omega\, t) \int_0^R r\,\mathrm{d}r = \frac{1}{4}\,\mu_0\,\sigma\, R^2\,\omega\, B_0\, \sin(\omega\, t)$$

L'amplitude de b est négligeable devant celle de B si

$$\frac{1}{4}\,\mu_0\,\sigma\, R^2\,\omega \ll 1$$

Soit en introduisant l'épaisseur caractéristique de peau $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0\,\sigma\,\omega}}$

$$\frac{R^2}{2\,\delta^2} \ll 1$$

soit encore, puisqu'en ordre de grandeur, le facteur 2 n'est pas significatif $R \ll \delta$